УДК:[004.4+514.1+513.3]
DOI: 10.15587/1729-4061.2019.180859

Дослідження задачі побудови квадрик за дотичними конусами

В. О. Анпілогова, С. І. Ботвіновська, А. В. Золотова, А. Г. Суліменко

Дослідження присвячено розв'язанню задач, пов'язаних з моделюванням поверхонь другого порядку (квадрик), у визначник яких включено дотичні конуси. Всі дослідження виконано за парадигмою використання конструктивних методів створення алгоритмів. Це обумовлено тим, що існує можливість спиратись на значну кількість базових геометричних задач, реалізованих у САПР.

Задача моделювання квадрик за дотичними конусами є актуальною, тому що існує принаймні два важливих її застосування. Перше – це побудова поверхонь за її лінією обрису на перспективних зображеннях. При цьому, точка зору та перспективна лінія обрису задають обгортаючий конус який, у випадку квадрик, збігається з дотичним. Такі задачі розв'язуються в контексті задач технічної естетики та архітектурного проектування.

Друге застосування відбувається у задачах побудови квадрик, що спряжені по заданим кривим, або у задачах спряження двох квадрик третьою. Задача спряження поверхонь має широке практичне значення, що підтверджується зацікавленістю нею користувачів та розробників систем комп'ютерного моделювання.

У рамках дослідження акумульовано існуючі теоретичні геометричні властивості для моделювання квадрик, у визначник яких включено дотичні конуси та встановлено низку нових геометричних властивостей.

Розроблено спосіб, за яким задаючи лінію контакту на одному конусі є можливість знайти лінію контакту на другому конусі, а також знайти центр вписаної у ці два конуси квадрики. Запропоновано також альтернативний спосіб моделювання описаних поверхонь. За цим способом перерізи всіх квадрик, дотичних до двох конусів, є вписаними у чотирикутники, вершини яких належать лініям перетину заданих конусів. На основі конструктивних геометричних досліджень розроблено алгоритми для комп'ютерної реалізації задач моделювання об'єктів за лініями обрисів на їх перспективних зображеннях.

Отримані результати дослідження у вигляді теоретичних викладок та прикладів їх застосування, показують дієздатність запропонованих алгоритмів. Описаний підхід до розв'язання поставлених задач дозволяє розширити можливості існуючих комп'ютерних систем при їх застосуванні в роботі конструкторів і значно спростити процес створення реальних об'єктів

Ключові слова: квадрика, дотичні конуси, визначник поверхні, лінія контакту, перспективне зображення, спряження поверхонь

1. Вступ

Задача моделювання поверхонь другого порядку (квадрик) за заданими дотичними конусами є актуальною, бо існує принаймні два її важливих застосування.

Перше – це побудова поверхонь за її лінією обрису на перспективних зображеннях. При цьому, точка зору та перспективна лінія обрису задають обгортаючий конус який, у випадку квадрик, збігається з дотичним. При побудові різних видів поверхонь правила, за якими задаються один або декілька обгортаючих конусів, визначаються постановкою задачі та видом самої модельованої поверхні. Такі задачі розв’язуються в контексті задач технічної естетики та архітектурного проектування. У випадку квадрик, обгортаючих конусів може бути один, два або три. Відомо, що три конуси визначають квадрику однозначно, але ці конуси не можуть бути задані довільно. Два дотичних до квадрики конуса також не можуть бути задані довільно, бо за теоремою Г. Монжа ці конуси, повинні мати дві спільні дотичні площини.

Друге застосування відбувається у задачах побудови квадрик, що спряжені по заданим кривим, або у задачах спряження двох квадрик третьою. Задача спряження поверхонь має широке практичне значення, що підтверджується зацікавленістю нею користувачів і розробників систем комп’ютерного моделювання. Невирішеною залишається реалізація поставленої задачі у випадку, якщо всі спряжені поверхні – квадрики. Взагалі, системи 3D комп’ютерного моделювання «слабо підтримують» геометрію моделювання квадрик, що стимулює розробку алгоритмів та створення додатків для оперування цими геометричними об’єктами.

Тому залишаються актуальними питання та теоретичні дослідження, пов’язані із конструктивно-параметричним аналізом побудови квадрики за двома дотичними конусами та спряження двох квадрик третьою.

2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Сучасна парадигма комп’ютерного геометричного моделювання поверхонь базується на двох підходах. Перший підхід забезпечує можливість побудови як завгодно щільного каркасу точок, за кінематичними схемами або схемами інциденцій. Другий – за параметричними рівняннями кривих та поверхонь, які включають точки інтерполяції та управляючі точки.

Але деякі дослідження виконуються в традиційній аналітичній формі, а їх комп’ютерна реалізація дозволяє отримати корисні для практики результати. Так, у роботах [1, 2] автори проводять детальний параметричний аналіз існуючих можливостей побудови квадрик за заданою кількістю точок, та вплив заданих умов на форму та властивості модельованих квадрик.

У роботі [3] запропоновано моделювання квадрик за допомогою апарату геометричної алгебри. Геометричну алгебру можна розуміти як сукупність інструментів для конструювання та перетворення геометричних об’єктів. Геометрична алгебра дозволяє обирати ці інструменти користуючись інтуїцією, але в будь якому разі вимагає дуже великий обсяг обчислень. Існують різні реалізації геометричної алгебри. Автори [3] поставили та розв’язали задачу побудови алгебри з оптимальним обсягом обчислень. Це дозволило провести процес моделювання квадрик і розв’язувати на них диференціально-геометричні та позиційні задачі.

У роботі [4] розглядаються питання використання квадрик як примітивів. Показано, що тіла, обмежені квадриками, забезпечують широкій набір для констрування моделей тривимірних об’єктів. Обговорюються та класифікуються регулярізовані оператори, які гарантують топологічну замкненість об’єктів.

Задача топологічної коректності результату перетину двох квадрик взагалі привертає увагу багатьох дослідників. У роботі [5] виконано прискіпливий аналіз результатів у цьому напрямку. Зроблено висновок, що хоча геометричні підходи мають сталість результатів, проте вони і більш обмежені. Натомість, у [5] пропонується і свій підхід. Основна мета – отримання топологічно-коректної лінії перетину двох квадрик. Підхід заснований на аналізі проекції (ліній обрисів) двох поверхонь, що перетинаються. Такий підхід у значній мірі є конструктивним.

У 90-ті роки минулого століття заснована нова гілка геометрії, названа авторами дискретною диференціальною геометрією [6]. Відмінною її особливістю є можливість отримання на основі конструктивно-логічних міркувань з мінімальним залученням аналітичних залежностей основних теорем диференціальної геометрії для об’єктів будь якої вимірності. Основою інтерпретацій геометричних побудов стало виведене у роботі [7] поняття дискретної конгруенції. Ще одним важливим результатом цієї роботи стало те, що дискретна конгруенція, сформована на основі чотиривимірного одиничного параметричного куба, обмежується на двопараметричну множину квадрик. Це говорить про те, що квадрики не втратили своє значення не тільки у практичному сенсі [8], а і у теоретично-геометричному.

Натомість, прикладна геометрія традиційно розв’язує задачі моделювання кривих та поверхонь конструктивними методами [9].

Ситуацію з коніками можна вважати розв’язаною. Оскільки, є системи (наприклад, SolidWorks [10]) у яких закладено широкі можливості їх побудови. Крім того, рядом авторів створено додаток до системи AutoCAD, який на суто конструктивній основі дозволяє виконувати побудову конік за будь-якими умовами: дійсними, невласними, уявними та їх комбінаціями і розв’язувати складні геометричні задачі. Саме такий підхід представлено у роботах [11, 12].

На сьогодні у сучасних роботах науковці часто повертаються до конструктивного методу аналізу та синтезу алгоритмів. Це обумовлено появою систем комп’ютерного моделювання, які значно поширили інструментарій реалізації досліджень. Так, у [13] автором запропоновано і реалізовано конструктивний метод побудови квадрики за дев’ятьма точками. У роботі [14] конструктивними методами досліджуються лінії перетину квадрик. Автор роботи [15] застосував конструктивний спосіб для дослідження властивості параметрично заданих кривих вищих порядків. У роботі [16] розглядаються питання спряження квадрик. У представлених дослідженнях автор обмежується конусами другого порядку.

Але в жодній з означених робот не розглядається дотичний конус як складова визначника поверхні.

Побудова квадрик за дотичними конусами базується на тому, що лінія контакту конуса, дотичного до квадрики, є конікою. Цей результат був отриманий ще засновником нарисної геометрії Г. Монжем у роботі [17] і є основою методів побудови квадрик за дотичними конусами.

Задача має дві постановки. Перша – реконструкція квадрики за її зображенням. Такі дослідження представлені у роботі [18]. У своїх дослідженнях автор аналізує відбиття світла від поверхні квадрики. Це дозволяє однозначно визначити квадрику навіть не знаючи центрів обгортаючих конусів. Друга – моделювання поверхонь у середовищі графічної комп'ютерної системи. У цьому разі конструктор задає бажані лінії обрису з бажаних точок зору. Такий підхід реалізовано у роботі [19]. Автор розв'язує задачу комп'ютерного моделювання сферичних об'єктів дизайну на перспективних зображеннях за лініями обрису. Але не розглядаються інші квадрики.

У роботі [20] проведено параметричний аналіз задачі побудови квадрики обертання за дотичним конусом. Показано, що у цьому разі дотичний конус визначає двопараметричну множину поверхонь. У дослідженнях, проведених у роботі [21] автором проаналізовано включення лінії обрису у визначник квадрики загального виду і показано, що у цьому випадку дотичний конус визначає чотирьохпараметричну множину квадрик, коли лінія контакту не задана. Коли лінія контакту задана, визначається однопараметрична множина квадрик.

За результатом проведеного аналізу є підстава вважати, що розвиток комп'ютерних технологій дав поштовх до розробки нових методів моделювання квадрик за заданими інженерними умовами. Цей розвиток відбувається у двох напрямках: аналітичному та конструктивному. У обох напрямках отримані суттєві результати.

Але нема ґрунтовних досліджень, що дозволяють включати у процес моделювання умови дотику до конусів. Тому дані дослідження проводяться в рамках проблеми комп'ютерного моделювання квадрик за умовами дотику.

3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є розробка теоретичних та алгоритмічних засобів для розв'язання задачі моделювання квадрик, у визначник яких включено дотичні конуси, методами комп'ютерної графіки

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– виконати теоретичні дослідження щодо можливості моделювання квадрики, дотичної до двох конусів, в рамках розв'язання задачі побудови поверхні другого порядку за лінією обрису на її перспективних зображеннях;

– розробити за допомогою конструктивних методів алгоритми для комп'ютерної реалізації задач моделювання об'єктів за лініями обрисів на їх перспективних зображеннях;

– навести приклади практичного застосування отриманих результатів дослідження.

4. Об'єкт, предмет та методи дослідження щодо можливості моделювання квадрик, у визначник яких включено дотичні конуси

Об'єктом представленого дослідження є квадрики, а предметом – дослідження умов, за якими ці квадрики можуть бути побудовані. При цьому основні обрані умови – це умови дотику.

Загальновідомо, що методи геометрії поділяються на дві категорії – аналітичні та конструктивні. Конструктивна геометрія базується на основі конструктивно-логічних міркувань при заданій сукупності аксіом і теорем. Історично, геометрія виникла як конструктивна наука. З появою аналітичних методів, конструктивні методи дещо поступилися їм у популярності. Але, і на сьогодні майже всі гілки геометрії, такі як: топологія; обчислювальна геометрія; дискретна диференціальна геометрія не кажучи вже про проективну, успішно використовують конструктивні методи.

Парадигма використання конструктивних методів у прикладній гілці геометричних досліджень набула актуальності у зв’язку з тим, що у системах автоматизованого проектування велика кількість достатньо складних геометричних задач розв’язується в автоматичному режимі. Тому, конструктивні геометричні дослідження у прикладній галузі можуть оперувати геометричними властивостями (теоремами або аксіомами) та інструментарієм, реалізованим у комп’ютерних системах. Це дозволяє створювати ефективні алгоритми, навіть без застосування методів аналітичного супроводу. Проведені дослідження спираються саме на цю парадигму.

5. Теоретичні дослідження щодо можливості побудови квадрик у визначник яких включено дотичні конуси

5. 1. Властивість про центри конічних перерізів

Задані: конус другого порядку S і пряма p довільного положення.

Пучок площин, інцидентних довільній прямій, перетинає конус другого порядку по конікам, центри яких належать одній площині.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Пряма p не перетинає конус S. Цьому випадку відповідає конструкція на рис. 1, *а*. Для доведення властивості проведемо через пряму p довільну площину Π_0. Ця площина перетинає конус по деякій коніці s_0. Точка P – полюс прямої p відносно кривої s_0. Його побудовано, за відомим алгоритмом: точки 1 та 2 – довільні точки прямої p, прямі d та k – поляри цих точок, їх перетин точка P – полюс прямої p. Через точку P проведемо пряму p', паралельну заданій прямій p. Знайдемо її полюс $P' \in p.$

За одним з визначень [22] поляра – пряма, якій належать всі точки, гармонійно спряжені з полюсом, відносно точок перетину із конікою. Це виконується для всіх прямих, що належать полюсу. Так, на прямій d складне відношення четвірки точок $[A'B'PD] = -1,$ тобто точки гармонійно спряжені. Але, якщо одна з гармонійно спряжених точок нескінченно віддалена, то парна з нею точка поділяє відрізок іншої пари навпіл [22]. Тобто для прямої $p' // p$ точка D нескінченно віддалена, а точка P – середина відрізку AB. Але, центр конічного перерізу належить прямій, яка проходить через полюс та середину хорди поляри цього полюсу [21].

Довільна площина Π_i, що належить пучку площин p перетинає конус по коніці s_i, її хорда $A_iB_i = \Pi_i \wedge SAB.$ Площини Π_i та SAB належать пучкам площин з паралельними осями $p' // p,$ тобто ці площини перпендикулярні одній і цій самій площині. До цієї ж площини будуть перпендикулярні всі лінії попарного перетину площин цих пучків. Тому $A_iB_i \,//\, AB$, а трикутники ABS і A_iB_iS подібні. З чого випливає, що точка P_i – середина хорди A_iB_i прямої p_i. Прямі, дотичні до коніки s_i в точках A_i та B_i, належать площинам SAP' та SBP', що дотичні до конуса, і належать площині Π_i. Ці три площини перетинаються в одній точці P', яка є полюсом для хорди A_iB_i. Пряма $P'P_i$ проходить через середину хорди A_iB_i, і на ній лежить центр кривої s_i. Тобто, центр кривої s_i належить площині SPP'. Це виконується для будь-якої площини Π_i.

Властивість 1. Центри всіх перерізів конуса другого порядку є пучком площин належать площині, інцидентній: вершині конуса; полюсу прямої, що задає вісь пучка січних площин і полюсу прямої, що паралельна осі пучка і проходить через полюс цієї осі.

Випадок 2. Пряма p перетинає конус з вершиною S. Цьому випадку відповідає конструкція на рис. 1, *б*.

Приймемо, що пряма p перетинає конус в точках A і B. Дотичні площини до конуса $P'SA$ та $P'SB$ у цих точках утворюють двогранний кут з ребром $P'S$. Задаючи на прямій $P'S$ довільні точки P_i' будемо виділяти площини $P_i'AB$. Ці площини перетинають двогранний кут по прямим $P_i'A$ та $P_i'B$, які будуть дотичними до перерізів.

Тобто P_i' будуть полюсами хорди AB – спільної поляри всіх перерізів. Позначимо через P середину хорди AB. Тоді центри перерізів будуть належати прямим $P_i'P$, які утворюють площину $P'PS$, як і у випадку 1.

Властивість 2. Центри всіх перерізів конуса другого порядку є пучком площин з віссю p, яка перетинає конус, належать одній площині. Ця площина проходить через середину хорди, яка з’єднує точки перетину прямої p з конусом, та через ребро двогранного кута, утвореного дотичними площинами в точках перетину прямої p з конусом.

Якщо в обох випадках замінити пряму p на паралельну їй пряму, то зміниться і положення прямої p', але не зміниться її напрям. Внаслідок цього зміниться положення точок P та P', але ці дві точки надалі разом з точкою s будуть визначати одну й ту саму площину.

Узагальнення. Бачимо, що обидві властивості мають багато спільного і можуть бути об’єднані в одну, а саме:

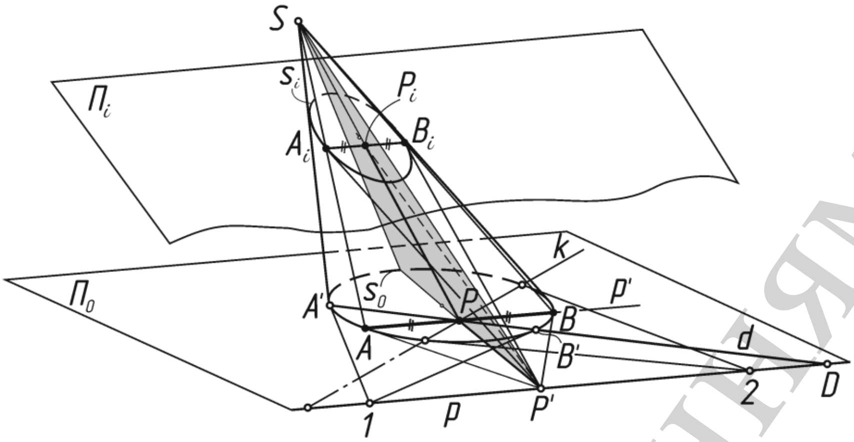
всі площини, що паралельні одній і тій самій прямій або належать їй, визначають на заданому конусі перерізи, центри яких належать одній площині. Цю площину будемо називати площиною центрів.

Крім того, з цих властивостей випливає ще одне узагальнення: всі конуси, вершини яких належать одній прямій і які мають спільну хорду, перетинаються площинами, які інцидентні цій хорді або паралельні їй, по конікам, центри яких належать одній площині.

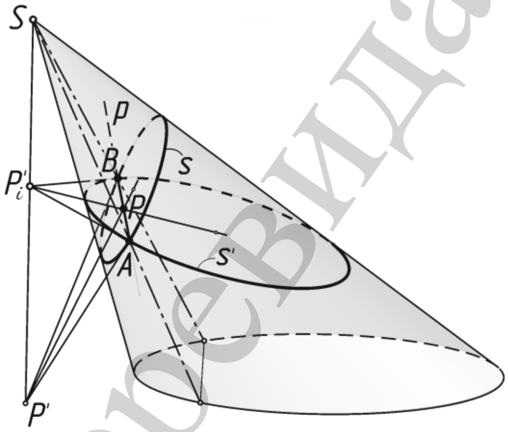
Зауваження.

1. Якщо підмножина цих площин буде паралельна не тільки прямій p, а водночас – паралельна одній з твірних конуса, то ця пряма буде перетинати конус по нецентральній кривій – параболі. У цьому випадку, всі площини, що паралельні одній і тій самій прямій p та одній і тій самій твірній конуса, мають спільну площину, якій належать діаметри парабол, що спряжені з хордами A_iB_i. Доведення цього, як таке, що не буде використовуватись у цьому дослідженні, не наведено.

2. Для підмножини площин, які інцидентні вершинам конуса і перетинають конус по двом дійсним прямим, задача стає виродженою, бо вершина конуса S – центр всіх цих перерізів.



а

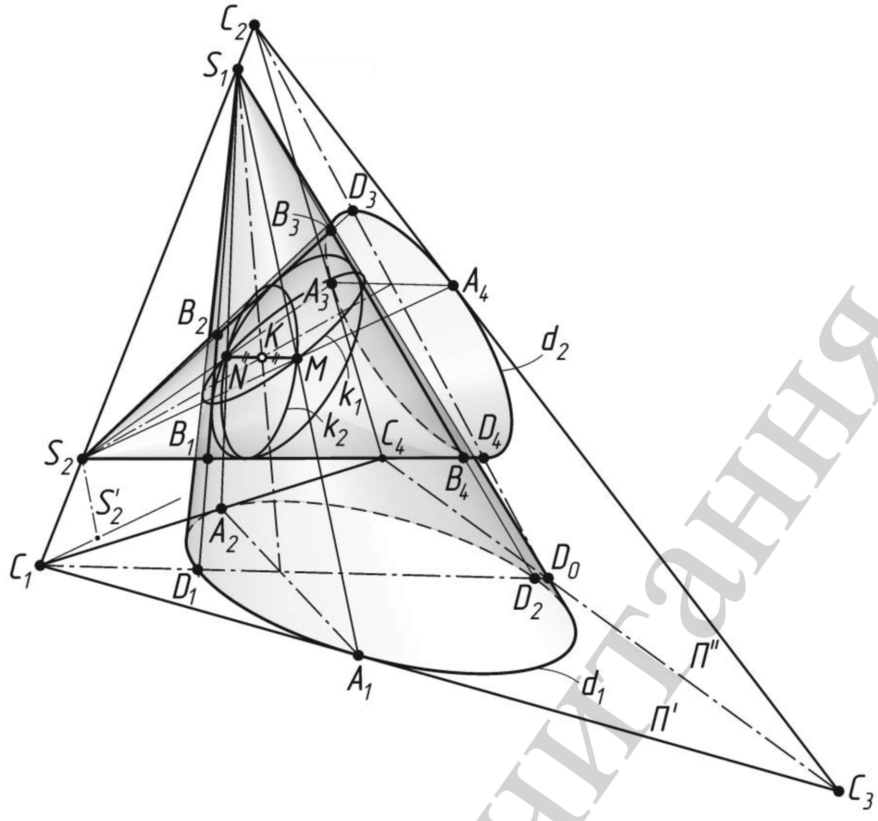


б

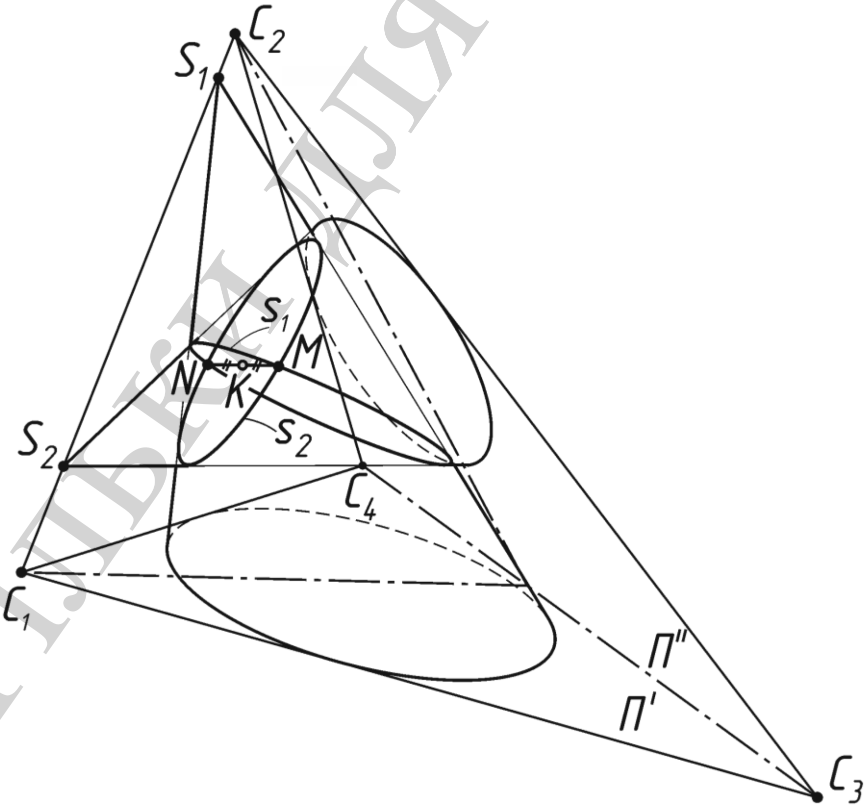
Рис. 1. Властивість про центри конічних перерізів у пучках площин: *а* – вісь пучка не перетинає конус; *б* – вісь пучка перетинає конус

5. 2. Варіант побудови геометричної конструкції моделювання квадрики за дотичними конусами

На рис. 2, *а* задано дві перспективні площини проекцій (картини) П' та П'' і два центри проекціювання S_1 та S_2, відповідно. Криві другого порядку $d_1 \subset \Pi'$ та $d_2 \subset \Pi''$ мають бути визначені так, щоб разом з вершинами S_1 та S_2 утворили конуси, що мають дві спільні дотичні площини. Точки C_1 та C_2 – точки перетину площин П' та П'' з прямою, яку задано точками S_1 та S_2.



а



б

Рис. 2. Варіант побудови геометричної конструкції: *а* – геометрична схема; *б* – перетин конусів другого порядку по плоским кривим

Покажемо, що ця конструкція має вісім вільних параметрів, які можуть бути реалізовані для моделювання поверхні другого порядку. Наприклад, так: коніка d_1 будується довільно, на це витрачаються п’ять параметрів. Дотичні до кривої d_1, проведені з точки C_1 (C_1A_1 та C_1A_2) продовжуються до перетину з площиною П" у точках C_3 та C_4. Площини $C_1C_2C_3$ та $C_1C_2C_4$ утворюють двогранний кут, до якого мають бути дотичні обидва конуси. Крива d_2 будується за умови дотику до прямих C_2C_3 та C_2C_4, а три параметри реалізуються довільно. Зокрема, довільно задаються точки A_3 та A_4. Тоді залишається один вільний параметр з восьми, що забезпечує конструкція. Тому, наприклад, довільно задаємо точку D_3 або D_4, яка визначить коніку d_2. Вже з того, що ця конструкція восьмипараметрична, випливає, що вписаних поверхонь другого порядку буде однопараметрична множина.

Задана геометрична конструкція формалізує задачу побудови квадрики за двома перспективними зображеннями. Зауважимо, що конуси S_1 та S_2 – конуси другого порядку, але їх осі не тільки не перпендикулярні картині, але і взагалі невідомі. Не передбачається ні встановлювати положення осей, а ні складання будь-яких рівнянь.

Твірні конусів, що проведені через точки дотику A_1, A_2 та A_3, A_4 перетинаються між собою у точках M та N. Через ті ж точки пройде лінія перетину конусів. Ця лінія розпадається за теоремою Г. Монжа на дві плоскі криві (коніки s_1 та s_2 (рис. 2, *б*)).

Жодна з цих кривих не може увійти до складу вписаної поверхні. Дійсно, навіть якщо припустити, що існує вписана квадрика, що інцидентна одній з ліній перетину конусів, то ця лінія буде визначати два дотичних конуса до квадрики з однією лінією контакту, що неможливо. Тому одна лінія контакту k_1 має проходити через пряму MN і перетинати конус S_1, а друга k_2 – через туж пряму MN і перетинати конус S_2. Тоді тільки точки M та N будуть спільними точками кривих, що визначають шукану поверхню.

Один дотичний конус, визначає чотирьохпараметричну множину вписаних поверхонь, якщо лінія контакту не задана, і однопараметричну, якщо лінія контакту задана [21]. При двох дотичних конусах маємо однопараметричну множину вписаних поверхонь у випадку невизначених ліній контакту. При існуванні одного дотичного конуса площина, що задає лінію контакту може бути обрана довільно. У задачі з двома дотичними конусами це буде однопараметрична множина площин пучка з віссю MN. Однієї лінії контакту достатньо для визначення поверхні, вписаної у два конуси. Але, для розв’язання деяких конструктивних задач (наприклад, знаходження центру квадрики) та для налагодження стандартних алгоритмів отримання перерізів поверхні різноманітними пучками площин, корисно визначити лінію контакту і для другого конуса.

Якщо задавати їх незалежно одну від одної, то будемо мати двопараметричну множину пар кривих, що суперечить параметричному аналізу.

Наступна задача – це з’ясувати, як задаючи довільно одну з кривих, наприклад k_1, що є лінією контакту з конусом S_1, отримати криву k_2 – лінію контакту з конусом S_2. Площину S_1KS_2 будемо називати площиною центрів. Всі перерізи конусів S_1 та S_2 пучком площин з віссю MN будуть перетинатися нею по діаметрам (властивість 2). Продовжуючи площину центрів до площин *П'* та П" отримуємо твірні конусів S_1D_1, S_2D_2, S_3D_3 та S_4D_4, перетин яких утворює чотирикутник з вершинами B_i, i=1…4, який обмежує зону площини центрів, що знаходиться усередині обох конусів.

Кожна з кривих k_1^i має дотикатись до сторін B_1B_2 та B_3B_4 цього чотирикутника, а кожна з кривих k_2^i до сторін B_2B_3 та B_1B_4.

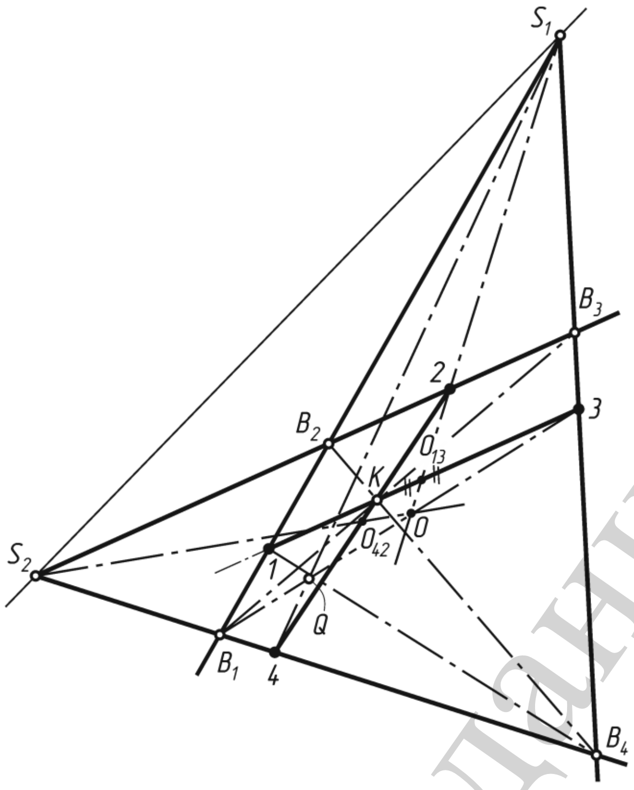
Серед всіх кривих, площини яких проходять через пряму *MN* і перетинають конуси S_1 та S_2 є і лінії s_1 та s_2 – криві перетину двох конусів (за теоремою Г. Монжа). Такі криві проходять через спільні точки конусів, а такими в площині центрів є тільки точки B_i, i=1…4. Криві s_1 та s_2 належать пучку площин з віссю *MN* і в перетині з площиною центрів їх діаметри B_1B_3 та B_2B_4 инцидентні точці *K*. А тому, точка *K* є точкою перетину діагоналей чотирикутника з вершинами B_i, i=1…4.

Площина центрів, як і будь яка інша площина, має перетинати вписану квадрику по кривій другого порядку, тому задачу узгодження кривих k_1 та k_2 можемо замінити задачею узгодження їх діаметрів при побудові кривої, вписаної в чотирикутник площини центрів.

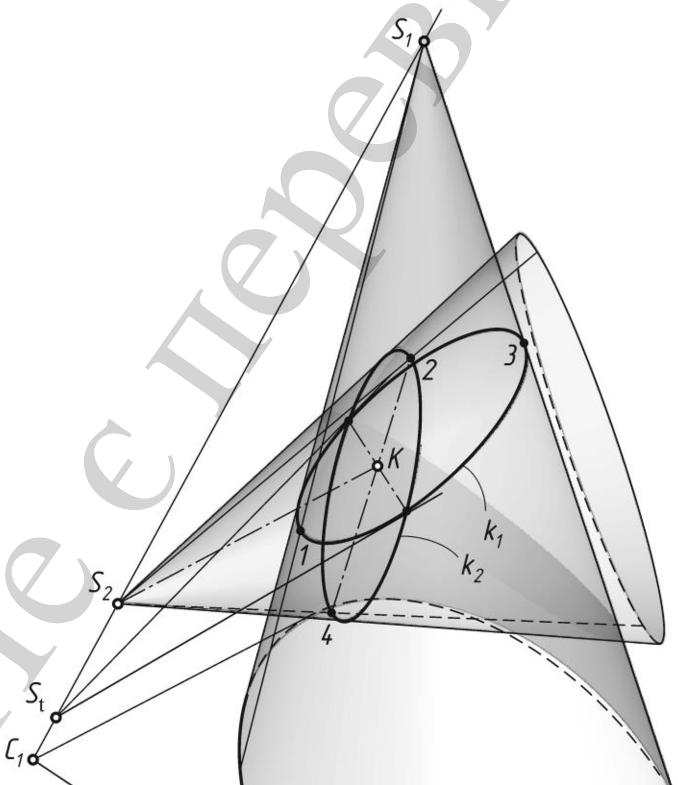
На рис. 3, *а* зображено натуральну величину площин центрів. Сторони чотирикутника B_1, B_2, B_3, B_4 задають чотири параметра для побудови діаметрального перерізу всіх поверхонь, що моделюються заданими конусами. П’ятий параметр може бути обраний довільно. Один з найбільш плідних варіантів – це завдання точки дотику кривої до однієї зі сторін. Нехай це буде точка 1 на дотичній B_1B_2. За теоремою Бріаншона «про коніки вписані у чотирикутник» [22], точка дотику до протилежної сторони має знаходитись на прямій, що проходить через точку *1* та точку *K*, перетину діагоналей чотирикутника. Це задає пряму 13, яка будучи перенесеною у простір, разом з прямою *MK* задає лінію контакту з конусом S_1 (крива k_1 на рис. 3, *б*).

Для того, щоб знайти лінію контакту з конусом S_2 розглянемо трикутник $B_1B_4S_1$ і приймемо точки 1 та 3 за точки дотику до двох його сторін (рис. 3, *а*). Тоді за теоремою Бріаншона «про коніки вписані у трикутник» [22] прямі, що з’єднують точки дотику кривої до сторін трикутника з протилежними вершинами чотирикутника, перетинаються в одній точці. Це буде точка *Q*, яка є точкою перетину прямих $1B_4$ та $3B_1$. Через цю точку має проходити пряма, що з’єднує вершину конуса S_1 з точкою дотику вписаної кривої до прямої B_1B_4. Це є точка 4, яка визначає точку 2 (точку дотику до сторони B_2B_3) у перетині з прямою k_4. Пряма 24 разом з прямою *MN* в просторі визначають площину кривої k_2, що належить до конусу S_2 (рис. 2, 3, *б*). Таким чином, пряма 13 повністю визначає квадрику дотичну до обох конусів.

Повернемося до рис. 3, *а*. Прямі 13 та 24 є діаметрами ліній контакту поверхні другого порядку з конусами S_1 та $S2_1$, відповідно. З цього випливає, що їх середини – точки O_{42} і O_{13} є центрами ліній контакту.



а



б

Рис. 3. Натуральна величина площин центрів та моделювання перерізів вписаної поверхні: *а* – зображення натуральної величини площини центів; *б* – лінії контакту вписаної поверхні

Відомо, що вершина дотичного конуса, центр лінії контакту [21] та центр вписаної поверхні належать одній прямій – це для конуса S_1 пряма S_1O_{13}, і для конуса S_2 – пряма S_2O_{42}. Ці прямі належать одній площині центрів і в перетині визначають один центр поверхні – точку O, що моделюється за двома дотичними конусами. При зміні кривої k_1 (рис. 3, *б*) положення центру буде змінюватись, але у будь-якому разі осі будуть належати площині центрів. Тому, справедлива така властивість:

Властивість 3. Центри квадрик, вписаних у два конуса, завжди належать площині, яка проходить через вершини конусів і точку, що є серединою відрізка, який з’єднує подвійні точки перетину конусів.

6. Можливі геометричні схеми побудови поверхонь другого порядку, у визначник яких включено два дотичні конуси

Розглянемо можливі схеми побудови поверхні другого порядку. Будь-якій пучок площин з власною або невласною віссю має перетинати поверхню по кривим другого порядку. Для даної конструкції природними є чотири пучка площин, які мають такі осі:

– перший пучок площин з віссю MN;

– другий з віссю S_1S_2;

– два наступних з віссю, паралельною прямій MN, яка проходить через вершину одного чи іншого конуса.

Пучки площин окремо розглядати не будемо, виконаємо їх узагальнення.

Як приклад розглянемо пучок площин Δ_i з віссю S_1S_2 (рис. 4). Обмежувальними площинами цього пучка є площини двогранного кута з ребром S_1S_2, яким належать точки M та N будь-якої модельованої поверхні. До цього ж пучка належить і площина центрів. Поточна площина пучка проходить через деяку i-ту точку прямої MN. I-та площина перетинає площину Π' по прямій C_1T_i, а площину Π'' по прямій C_2T_i. Ці прямі, у свою чергу, перетинають криві d_1 і d_2 у точках: T_{12}^i, T_{34}^i, T_{14}^i, T_{23}^i. З’єднуючи ці точки з вершинами конусів, до яких ці точки належать, у перетині твірних отримаємо точки B_1^i, B_2^i, B_3^i, B_4^i – чотирикутник, вершини якого будуть належати кривим s_1 та s_2, що випливає з побудови самих точок. Для подальшого розв’язання задачі необхідно побудувати криву, яка вписана у цей чотирикутник.

Для цього необхідно принаймні мати одну точку дотику, яку отримаємо при перетині площиною Δ_i кривих k_1 та k_2. Але, насправді, всі чотири точки перетину будуть точками дотику поточного перерізу чотирикутника з вершинами B_1^i, B_2^i, B_3^i, B_4^i. Тобто, площина Δ_i буде перетинати криві k_1 та k_2 (рис. 4) у точках, що належать сторонам чотирикутників B_j^i, де i=1…4, j=1…4. Ці точки були узгоджені на попередньому етапі сумісною побудовою кривих k_1 й k_2.

Знання про одну з точок дотику достатньо для комп’ютерної побудови кривої другого порядку. Моделювання відбувалось у системі SolidWorks, але може бути застосована будь яка інша система, яка має аналогічні засоби роботи з коніками та квадриками.

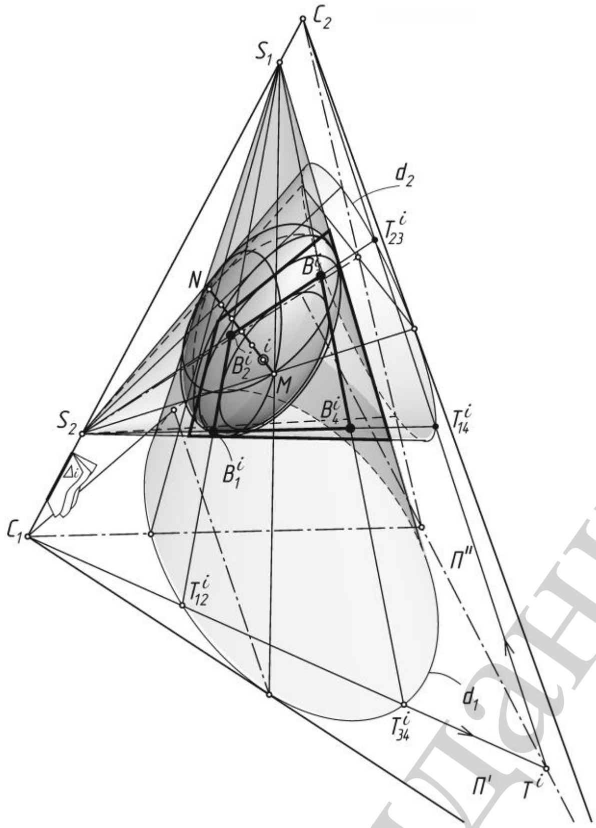
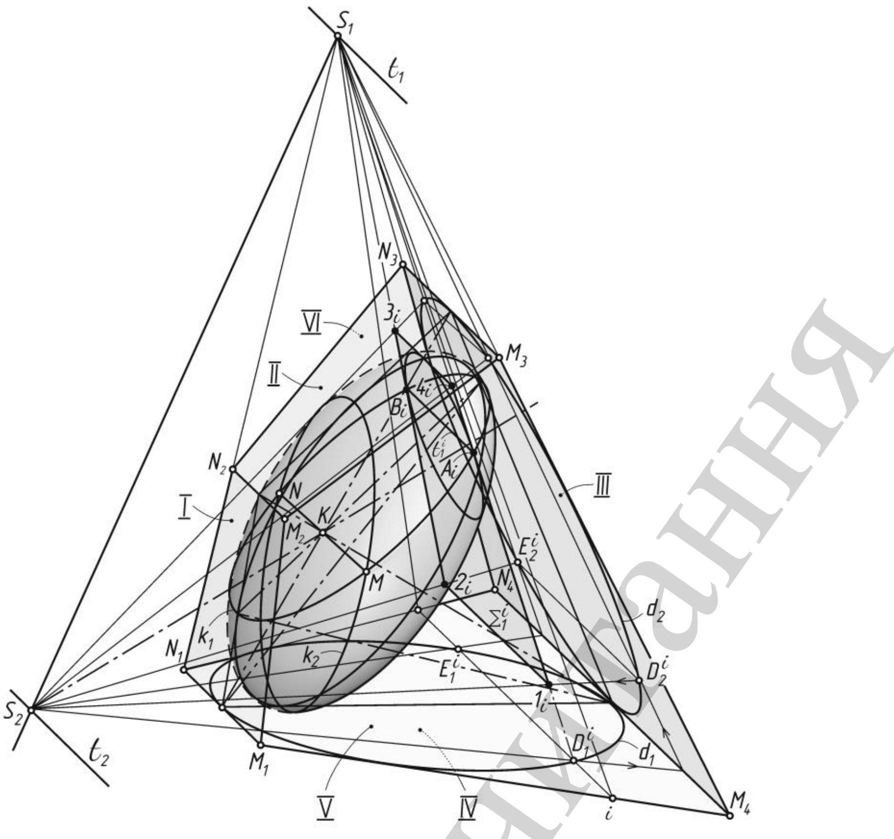


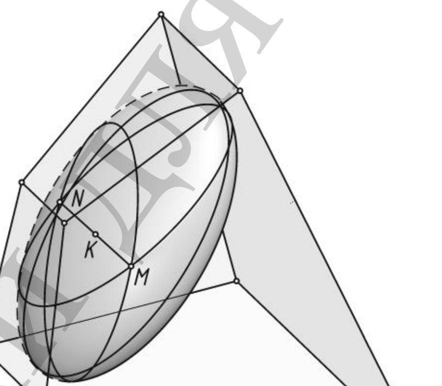
Рис. 4. Схема побудови квадрики за допомогою пучка площин з віссю S_1S_2

Пучки площин з осями, паралельними лінії *MN* та інцидентними вершинам конусів, представлені на рис. 5, для цього, конструктивну схему на рис. 2, *а* замінимо іншою схемою, зведеною до шестигранника (рис. 5, *а*).

Гранями цього шестигранника будуть дві грані дотичні до конуса S_1 у точках D_1 та D_2, дві грані – дотичні до конуса S_2 у точках D_3 та D_4, та дві грані двогранного кута, дотичні одночасно до обох конусів. З властивості 1 випливає, що у такому випадку чотири бічні ребра шестигранника будуть паралельними *MN*. На рис. 5 такі ребра позначено як M_iN_i, де i=1…4. Чотири грані, що інцидентні прямим M_iN_i на рис. 5 позначено римськими цифрами: I, II, III, IV.



а



б

Рис. 5. Шестигранник, що обмежує поверхню другого порядку, задану двома дотичними конусами: *а* – геометрична схема побудови квадрики; *б* – зображення квадрики, що доторкається до граней шестигранника

Грані, позначені на рис. 5 як V та VI – це фактично спільні дотичні площини до двох конусів і інцидентні як вершині S_1 так і вершині конуса S_2. Таким чином, шестигранник утворюється як перетин двох пірамід з вершинами у точках S_1 та S_2. У результаті цього перерізу отримуємо чотиригранну призму з ребрами, паралельним MN.

Криві k_1 та k_2, що належать однойменним конусам, разом дають шість точок дотику до граней заданого шестигранника вписаної квадрики. Такий шестигранник порівняно з довільним має додаткові властивості, а саме:

– прямі, що з'єднують точки перетину діагоналей на протилежних гранях перетинаються в одній точці, і ця точка буде серединою відрізка MN, тобто точкою K.

Дійсно, точка перетину діагоналей є об'єктом проективної геометрії. Тому прямій, що з'єднує вершину піраміди з точкою перетину діагоналей одного з перерізів, будуть інцидентні точки перетину діагоналей всіх довільних перерізів даної піраміди, які не належать вершині.

Для піраміди S_1 серед них будуть не тільки діагоналі площин *II* та *IV* але й діагональних площин $\{M_1N_2N_3M_4\}$, $\{N_3M_3M_2N_1\}$, $\{M_1M_2N_3N_4\}$, $\{M_4M_3N_2N_1\}$, $\{N_1N_3M_3M_1\}$, $\{M_4M_2N_2N_4\}$. Але, всі ці площини є перерізами не лише піраміди S_1, а й піраміди S_2 і зрізаної призми, що інцидентна ребрам M_iN_i, при i=1…4. Тому такі площини перетинаються в одній точці, яка належить прямій MN, і є серединою цього відрізка, виходячи з теореми Гауса [23].

Ця модель може бути застосована для побудови сітчастого каркаса квадрики. Для побудови цього каркаса зручно використовувати два однотипових пучка площин, а саме таких, які проходять через прямі t_1 та t_2, паралельні MN, що інцидентні вершинам конусів S_1 та S_2. Для виділення конкретної січної площини з пучка $\{t_1^i\}$ обираємо поточну точку на відрізку M_1M_4. Для виділення точок з пучка $\{t_2^i\}$ обираємо точку на відрізку M_1N_4.

На рис. 5 для прикладу наведено правило побудови перерізу у січній площині Σ_1^i, що проходить через пряму t_1 та точку i на прямій M_1M_4. У результаті проведених побудов отримаємо чотирикутник з вершинами $1_i2_i3_i4_i$, які є узгодженими за допомогою точок D_1^i та D_2^i на кривих d_1 та d_2, відповідно, і лінії M_4N_4. Перетин площини Σ_1^i з кривою k_1 дає точки A_i та B_i разом із дотичними до них S_1A_i та S_1B_i. П'ятий параметр для побудови поточного перерізу t_1^i отримаємо як перетин площини Σ_1^i з конікою в площині центрів. Цього достатньо для побудови поточного перерізу квадрики. За цим алгоритмом будується однопараметрична множина конік поверхні яку моделюємо, а саме, однопараметрична множина кривих, що належать пучку площин Σ_1^i. Так само будується однопараметрична множина кривих, що належать пучку площин Σ_2^i.

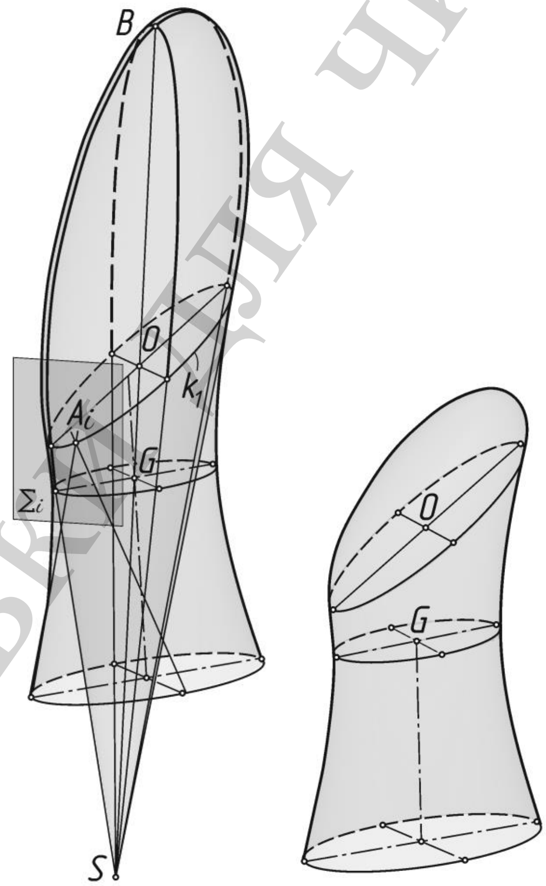
У процесі викладення матеріалу було змодельовано поверхні (рис. 4, 5), які можна розглядати як приклад моделювання квадрики за двома перспективними зображеннями. Нижче наведемо приклади побудови спряження поверхонь другого порядку за допомогою дотичних конусів.

7. Приклади реалізації результатів дослідження в задачах спряження квадрик

Задача моделювання спряження поверхонь другого порядку по плоским кривим може розпадатись на два варіанта. Перший включає в себе ситуацію, коли маємо задану квадрику і приймаємо її за базову поверхню. Другий варіант передбачає моделювання як базової поверхні, так і спряженої з нею. Перший варіант є значно простішим, оскільки маємо відразу лінію контакту та дотичний конус. За другим варіантом маємо той самий алгоритм, що був приведений для моделювання квадрики за двома перспективними зображеннями, тобто маємо два дотичні конуси, які повинні бути узгодженими.

Нижче наведемо приклад, коли задано базову поверхню, і на ній можемо визначити одну, або декілька ліній контакту.

На рис. 6, *а* маємо однопорожнинний гіперболоїд обертання з відомим центром поверхні точкою G. Якщо задати довільний переріз цього гіперболоїда, а саме коніку k_1 з центром O, то вершина конуса, дотичного до однопорожнинного гіперболоїда буде належати лінії, яка з'єднує центр O і центр поверхні G. Для визначення вершини конуса S будуємо у довільній точці A_i на лінії контакту k_1 площину дотику Σ_i до однопорожнинного гіперболоїда, яка у перетині з віссю GO і визначить вершину конусу дотикання (точку S). Для побудови модельованої поверхні можна обрати довільну точку B, краще за все на осі GO (рис. 6, *а*). Зміна положення точки B дозволяє отримувати інші за формою поверхні. Приклад однієї представлено на рис. 6, *б*.



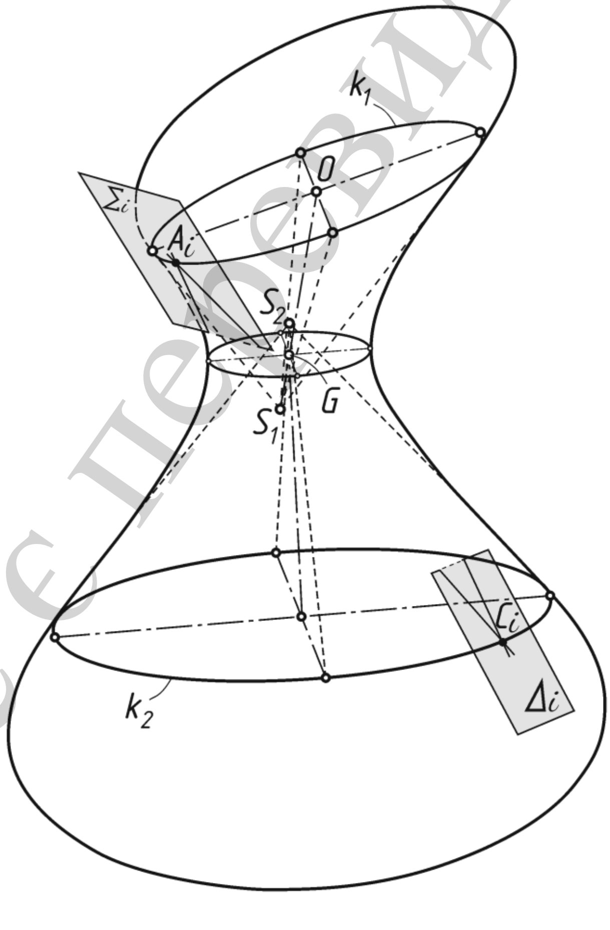
а *б*

Рис. 6. Приклад зміни форми спряжених квадрик: *а* – геометрична схема; *б* – приклад зміненої форми

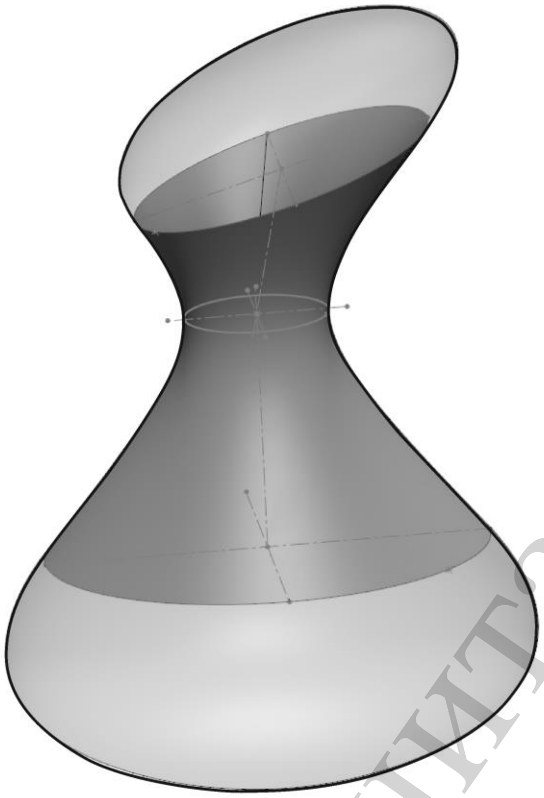
Нижче на рис. 7, 8 представлено побудову ще двох спряжених квадрик. У першому прикладі (рис. 7, *а*) задано базову поверхню, а саме однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду, що має два незалежні один від одного перерізи k_1 та k_2, які приймаємо за лінії контакту. Вісь фігури вертикальна. Точка G – центр поверхні.

Так само, як і у попередньому прикладі, в довільній точці $A_i \in k_1$ задаємо дотичну площину Σ_i. Ця площина на перетині з лінією GO (O – центр коніки k_1) визначає вершину S_1 конуса дотичного до однопорожнинного гіперболоїда. Для визначення вершини S_2, конуса дотичного до лінії контакту k_2, задаємо площину дотику Δ_i до однопорожнинного гіперболоїда. Зовнішній вигляд форми представлено на рис. 7, *б*. Положення управляючих формою точок не показано.

У третьому прикладі (рис. 8) показано моделювання вази. Вісь фігури не є вертикальною. Геометрична схема моделювання еліпсоїда, спряженого з однопорожниним гіперболоїдом, та зовнішній вигляд вази представлено на рис.8, *а*, *б*, відповідно. Параметром управління формою поверхні еліпсоїда (нижньої частини вази) обрано його центр, який має належати прямій OS. На рис. 8, *а* – це точка Q.

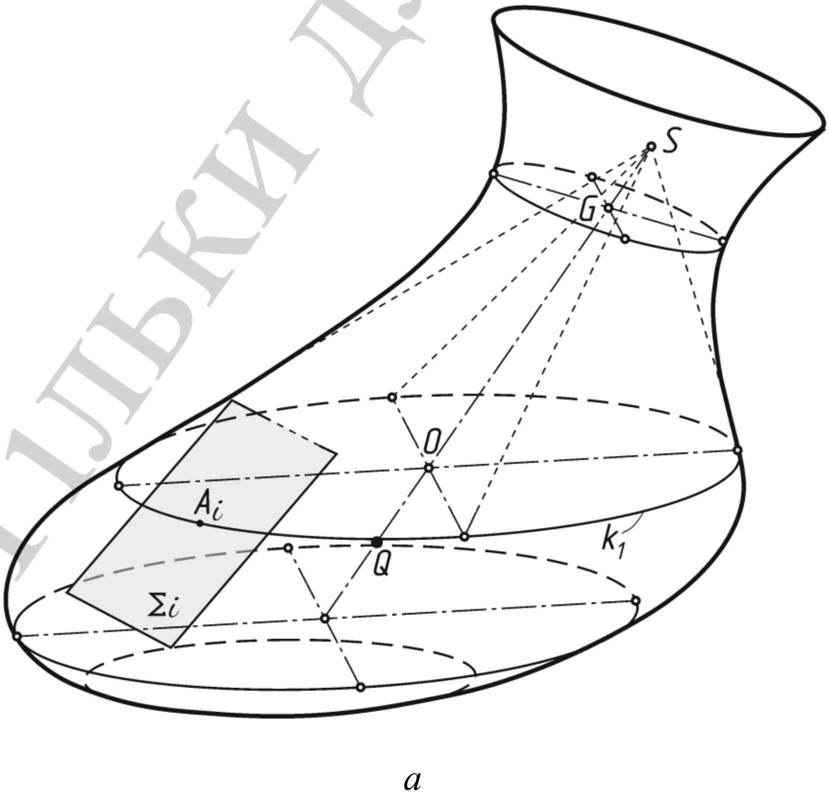


а

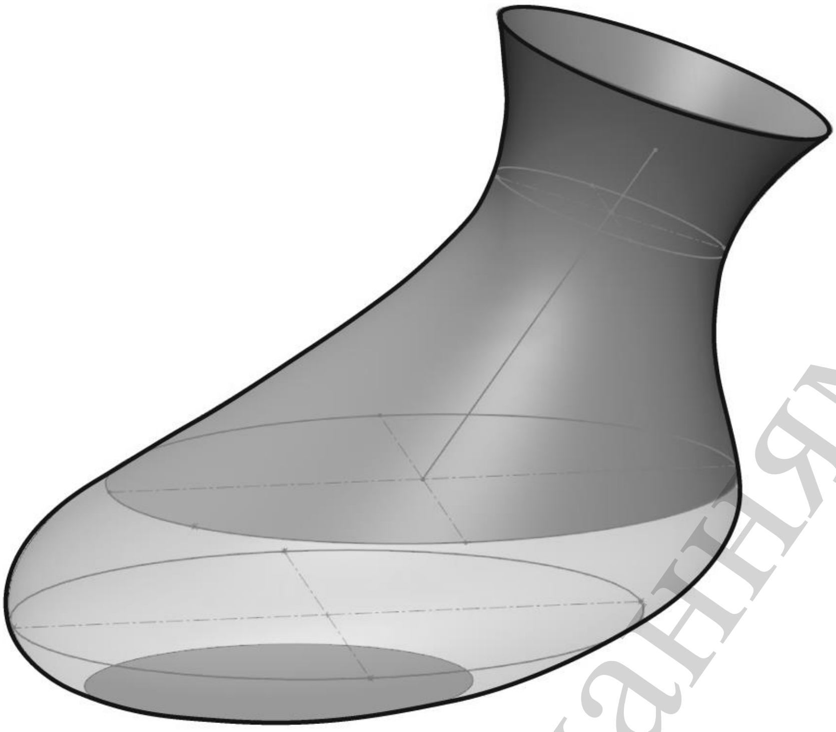


б

Рис. 7. Моделювання поверхонь із трьох спряжених квадрик: *а* – геометрична схема; *б* –зовнішній вигляд



а



б

Рис. 8. Поверхня вази із спряжених квадрик: *а* – геометрична схема; *б* – зовнішній вигляд

Всі наведені у статті приклади виконано за допомогою системи SolidWorks. Отримані теоретичні викладки та приклади їх застосування показують дієздатність алгоритмів і дають підстави стверджувати, що використання представлених способів та конструктивних алгоритмів може розширити можливості комп'ютерних систем при їх застосуванні в роботі конструкторів під час створення ними реальних об'єктів.

8. Обговорення результатів проведеного дослідження щодо можливості побудови квадрик за дотичними конусами та перспективи їх подальшого розвитку

Дослідження, пов'язані з моделюванням квадрик, у визначник яких включено дотичні конуси, виконано за парадигмою використання конструктивних методів створення алгоритмів.

У рамках описаного дослідження встановлено низку геометричних властивостей, корисних при моделюванні квадрик за лініями обрисів на їх перспективних зображеннях. Зокрема, встановлено, що за двома конусами другого порядку, які мають дві спільні дотичні площини, може бути побудована однопараметрична множина квадрик, дотичних до цих конусів. Запропоновано схему (рис. 4, 5) за якою з цієї множини виділяється конкретна поверхня та алгоритми побудови лінійного та сітчастого каркасів модельованої поверхні.

В узагальненому варіанті виведені геометричні властивості полягають у наступному:

– якщо задано конус другого порядку і пряму довільного положення, то всі площини, що належать або паралельні цій прямій, визначають конічні перерізи, центри яких інцидентні одній площині. Цю площину можемо вважати площиною центрів;

– центри всіх квадрик, вписаних у два конуса, завжди належать одній площині. Ця площина проходить через вершини конусів і точку, що є серединою відрізка, який з'єднує подвійні точки перетину конусів;

– задана лінія контакту на одному з конусів однозначно визначає лінію контакту на другому конусі і шукану поверхню, вцілому.

Дослідження і алгоритми стосуються того випадку, коли пряма, що з'єднує вершини дотичних конусів розташовується у підпросторі, зовнішньому по відношенню до конусів. Таке обмеження дозволяє використовувати результати дослідження для розв'язання задач у більш простих випадках моделювання поверхонь. Дослідження і побудова алгоритмів для розв'язання задачі у випадку, коли пряма, яка з'єднує вершини дотичних конусів, проходить у внутрішніх порожнинах конусів є предметом наступного розгляду.

Перспективою розвитку є також задача побудови поверхонь за трьома дотичними конусами. Але, найбільш цікавим, з точки зору перспектив подальших досліджень, є приведення алгоритмів до варіанту побудови дискретної спряженої сітки, яка належить квадриці. Це відповідатиме сучасному підходу у новій теоретичній гілці розвитку дискретної диференціальної геометрії. Перші кроки у цьому напрямку зроблено при побудові шестигранника до всіх граней якого має доторкатись квадрика, яка моделюється. Остаточна розробка і реалізація такого алгоритму дозволить будувати поверхні спряженою сіткою за заданими дотичними конусами.

Обидві ці задачі є суттєвими у рамках комп'ютерної графіки.

8. Висновки

1. Проведено параметричний аналіз задачі моделювання квадрик, у визначник яких включено дотичні конуси. У рамках цієї задачі виконано теоретичні дослідження, реалізація яких дозволяє будувати поверхні другого порядку за їх лініями обрису на перспективних зображеннях. Ці дослідження створили теоретичну базу для побудови об'єктів дизайну зі спряжених квадрик.

2. Розроблено спосіб, за яким задаючи лінію контакту на одному конусі є можливість знайти лінію контакту на другому конусі, і знайти центр вписаної у ці два конуси квадрики. Запропоновано також альтернативний спосіб моделювання описаних поверхонь. За цим способом перерізи всіх квадрик, дотичних до двох конусів, є вписаними у чотирикутники, вершини яких належать лініям перетину заданих конусів. На основі проведених геометричних досліджень розроблено принципово нові алгоритми, з використанням конструктивних методів геометрії, для комп'ютерної реалізації задач моделювання об'єктів за лініями обрисів на їх перспективних зображеннях.

3. Дієздатність створених і реалізованих алгоритмів побудови лінійчатого та сітчастого каркасів квадрик підтверджується прикладами змодельованих об'єктів дизайну. Прикладним аспектом використання отриманого наукового

результату є розширення можливостей існуючих комп'ютерних систем у процесі їх застосування для побудови квадрик за заданими умовами дотику.

Література

1. Gfrerrer, A., Zsombor-Murray, P. (2009). Quadrics of Revolution on Given Points. Journal for Geometry and Graphics, 13 (2), 131–144.
2. Zsombor-Murray, P., Fashny, S. (2006). A Cylinder of Revolution on Five Points. Journal for Geometry and Graphics, 10 (2), 207–213.
3. Breuils, S., Nozick, V., Sugimoto, A., Hitzer, E. (2018). Quadric Conformal Geometric Algebra of $R^{9,6}$. Advances in Applied Clifford Algebras, 28 (2). doi: https://doi.org/10.1007/s00006-018-0851-1
4. Emery, J. Conics, Quadrics and Projective Space. URL: http://www.stem2.org/je/quadric.pdf
5. Trocado, A., Gonzalez-Vega, L. (2019). Computing the intersection of two quadrics through projection and lifting. URL: https://arxiv.org/pdf/1903.06983.pdf
6. Bobenko, A. I., Suris, Yu. B. Discrete differential geometry. Consistency as integrability. URL: https://arxiv.org/pdf/math/0504358.pdf
7. Doliwa, A. (1999). Quadratic reductions of quadrilateral lattices. Journal of Geometry and Physics, 30 (2), 169–186. doi: https://doi.org/10.1016/s0393-0440(98)00053-9
8. Полежаев, Ю. О., Фаткуллина, А. А., Борисова, А. Ю. (2012). Геометрические модели сопряжений квадрик на фрагментах архитектурных объектов. Вестник МГСУ, 9, 18–23.
9. Михайленко, В. Е., Обухова, В. С., Подгорный, А. С. (1972). Формообразование оболочек в архитектуре. Киев: Будівельник, 207.
10. SolidWorks. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/SolidWorks
11. Korotkiy, V. A., Usmanova, E. A., Khmarova, L. I. (2017). Geometric Modeling of Construction Communications with Specified Dynamic Properties. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 262, 012110. doi: https://doi.org/10.1088/1757-899x/262/1/012110
12. Korotkiy, V. A., Usmanova, E. A., Khmarova, L. I. (2016). Dinamic connection of second-order curves. 2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). doi: https://doi.org/10.1109/icieam.2016.7911687
13. Korotkiy, V. A. (2018). Construction of a Nine-Point Quadric Surface. Journal for Geometry and Graphics, 22 (2), 183–193.
14. Хейфец, А. Л. (2002). Исследование линии пересечения поверхностей второго порядка в курсе теоретических основ компьютерного геометрического моделирования. International Conference Graphicon 2002. URL: http://graphicon2002.unn.ru/demo/2002/Kheyfets_2_Re.pdf
15. Иванов, Г. С. (2014). Конструктивный способ исследования свойств параметрически заданных кривых. Геометрия и графика, 2 (3), 3–6.
16. Иванов, Г. С., Жирных, Б. Г. (2015). Геометрическое обеспечение построения гладких сопряжений из отсеков конических поверхностей второго порядка. Инженерный вестник, 06, 1026–1033. URL: http://engsi.ru/doc/777408.html

17. Монж, Г. (2013). Начертательная геометрия. Классики науки. Москва: Книга по требованию, 292.

18. Rahmann, S. (2003). Reconstruction of Quadrics from Two Polarization Views. Pattern Recognition and Image Analysis, 810–820. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-44871-6_94

19. Сазонов, К. А., Янковская, Л. С. (2009). Компьютерное моделирование сферических поверхностей объектов дизайна на перспективных изображениях. Технічна естетика і дизайн, 6, 19–26.

20. Суліменко, С. Ю., Анпілогова, В. О, Левіна, Ж. Г. (2016). Формоутворення поверхонь обертання другого порядку за їх лініями обрисів. Сучасні проблеми архітектури та містобудування, 44, 320–325.

21. Суліменко, С. Ю. (2016). Конструктивно-параметричний аналіз формоутворення еліпсоїдів за їх лініями обрисів. Сучасні проблеми архітектури та містобудування, 42, 109–115.

22. Моденов, П. С. (1969). Аналитическая геометрия. Москва: МГУ, 688.

23. Адамар, Ж. С. (1951). Элементарная геометрия. Часть вторая. Стереометрия. Москва: ОНТИ, 760.